

- [40] ———, *El Weblog d'en Miquel. Un blog sobre viatges*, Agost 2003 – Agost 2017, <https://minobaviatger.wordpress.com/>.
- [41] M. Noguera and M. Grau, *Anàlisi matemàtica: pràctiques amb Maple V*, Edicions UPC, 1996.
- [42] M. Noguera, M. Grau, J. Peris, I. Barbería, and V. Chamizo, *Similarity and discrimination learning in humans*, Behavior analysis and social action 79 (2008), núm. 2, 114–119.
- [43] C. Sitges, X. Bornas, J. Llabrés, M. Noguera, and P. Montoya, *Linear and nonlinear analyses of EEG dynamics during non-painful somatosensory processing in chronic pain patients*, International journal of psychophysiology 77 (2010), núm. 2, 176–183.

## The Gröbner Cover, d'Antonio Montes

Tomás Recio  
Universitat de Cantàbria

El volum 27 de la col·lecció «Algorithms and Computation in Mathematics», de l'editorial Springer, és un llibre del recentment jubilat professor Antonio Montes Lozano (<https://mat.upc.edu/en/people/antonio.montes/>), del Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya, la fotografia del qual, feta per l'autor d'aquesta ressenya en una activitat social durant el congrés MEGA 2007 (Mètodes Efectius de Geometria Algebraica) a Strobl (Àustria), il·lustra aquesta breu recensió.



El llibre *The Gröbner Cover* és la culminació dels últims vint anys de treball del professor Montes sobre l'estudi de sistemes d'equacions polinòmiques amb paràmetres. En efecte, ja en el congrés EACA, a La Laguna, el 1999, Montes presentà una comunicació titulada «Basic algorithms for specialization in Gröbner bases», en la qual es plantejaven les línies mestres per desenvolupar un algorisme que recollís i millorés el proposat per

V. Weispfenning a «Comprehensive Gröbner basis algorithm» [1]. La comunicació, finalment, fou publicada amb el títol «A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters», en el *Journal of Symbolic Computation*, 33–2 (2002), que es pot considerar el precedent directe de l'obra que comentem ara.

De manera molt simplificada i per als lectors no experts en la matèria [2], direm que, donat un sistema d'equacions polinòmiques, les bases de Gröbner proporcionen un algorisme per reescriure el sistema d'una manera que en faciliti la resolució –per exemple, en forma triangular, convertint un sistema com ara  $\{x + y = 0, x - y = 0\}$  en un altre d'equivalent però pràcticament ja resolt, com ara  $\{x = 0, y = 0\}$ .

Però aquest procediment no és aplicable, i no serveix amb tota generalitat, quan tenim un sistema d'equacions amb paràmetres  $\{u_1, \dots, u_n\} = \mathbf{u}$  i variables  $\{x_1, \dots, x_m\} = \mathbf{x}$  i en volem descriure les solucions en funció dels valors dels paràmetres; per exemple, si considerem el sistema  $\{ux + y = 0, x - y = 0\}$  i pensem en el cas  $u = -1$ . Per això, el professor Weispfenning va desenvolupar les anomenades *comprehensive Gröbner basis* (CGB) amb l'objectiu de generar unes bases de Gröbner en termes d' $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{x}$ , amb la propietat singular de continuar sent bases de Gröbner en les variables  $\mathbf{x}$ , per a cada valor numèric dels paràmetres  $\mathbf{u}$ .

Aviat es va percebre que un problema important de les CGB era la seva manca de canonicitat, que contrastava amb la unicitat de les bases de Gröbner clàssiques. A més,

cal tenir en compte que la discussió dels sistemes de paràmetres mena, inevitablement, a treballar amb conjunts definits per equacions i inequacions (com ara  $\{u \neq -1\}$  a l'exemple anterior), és a dir, amb conjunts dels anomenats «constructibles», per als quals no resulta òbvia la formulació d'una forma canònica de representació.

El primer d'aquests dos problemes el va resoldre el treball d'Antonio Montes i Michael Wibmer, «Gröbner bases for polynomial systems with parameters», *Journal of Symbolic Computation*, 45 (2010), que representa la culminació d'una dècada d'esforços per arribar a una formulació canònica de les CGB, amb resultats intermedis assolits per Montes, sol o amb la coautoria de M. Manubens, com ara el ja esmentat «A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters» o l'article «Improving DISPGB algorithm using the discriminant ideal», de Montserrat Manubens i Antonio Montes, *Journal of Symbolic Computation*, 41 (2006), o el titulat «Minimal canonical comprehensive Gröbner system», també de Montserrat Manubens i Antonio Montes, *Journal of Symbolic Computation*, 44 (2009), resultats acompanyats sempre per les corresponents implementacions en Maple o Singular.

Aquests ingredients sòlids es recullen i descriuen detalladament a la primera part del llibre *The Gröbner Cover*, dedicada al desenvolupament teòric d'aquesta eina fonamental per a l'estudi d'equacions amb paràmetres mitjançant algorismes de càlcul simbòlic. Inclou, com ha estat característic en la trajectòria del seu autor, la referència detallada a la llibreria `grobcov.lib` de Singular, de manera que el llibre es pot considerar també un manual d'ús de la llibreria.

A més, aquesta primera part inclou una proposta de resolució del segon problema abans esmentat, relatiu a la descripció estàndard dels conjunts «constructibles» que intervenen en el Gröbner Cover, un assumpte que ja van tractar amb èxit Josep M. Brunat i Antonio Montes a «Canonical representation of constructible sets», *Math. Comput. Sci.*, 10 (2016), i que conforma, ara, un dels apartats d'aquesta primera part del llibre *The Gröbner Cover*.

La segona part de l'obra està dedicada a la descripció de tres aplicacions del recobriments de Gröbner: la primera, la demostració

automàtica de teoremes geomètrics; la segona, el càlcul de llocs geomètrics, i, en particular i en últim lloc, el càlcul d'envolvents. Les tres aplicacions no són, de cap manera, unes simples i directes conseqüències de l'aparell desenvolupat a la primera part. Al contrari, han impulsat la reconsideració i formulació de diversos conceptes teòrics, tots ells íntimament relacionats amb la metodologia —el *Gröbner Cover*—, considerada per tractar aquests temes. Diríem que el Gröbner Cover ha estat la guia que ha orientat les idees i ha bastit el llenguatge amb el qual descriure amb subtilesa un complex context geomètric com el que es manipula en les tres aplicacions.



La rellevància teòrica i pràctica implícita a la segona part del llibre es reflecteix en les diverses publicacions en revistes internacionals que han recollit els resultats que s'inclouen en aquesta part, com ara «Automatic discovery of geometry theorems using minimal canonical comprehensive Gröbner systems», d'Antonio Montes i Tomás Recio, LNAI 4869 (2007); «Generalizing the Steiner-Lehmus theorem using the Gröbner Cover», d'Antonio Montes i Tomás Recio, *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 104 (2014); o «An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry», de Miguel A. Abánades, Francisco Botana, Antonio Montes i Tomás Recio, *Computer-aided design*, 56 (2014).

En resum, el llibre *The Gröbner Cover* és una monografia que sintetitza dues dècades d'avanços científics en un assumpte crucial de l'àlgebra computacional, acompanyats tant d'una acurada descripció de la implementació dels algorismes forjats, com d'una sèrie d'aplicacions en el camp de la geometria elemental (però no per això senzilles d'atacar).

El llibre està redactat elegantment, amb un estil àgil i rigorós. L'acurada edició inclou nombroses il·lustracions que proporcionen un suport visual per comprendre millor alguns dels conceptes tractats.

Creiem que és un llibre imprescindible en tota biblioteca universitària, tant per als investigadors (en camps com la geometria algebraica, l'àlgebra commutativa o l'àlgebra computacional i les seves aplicacions) com per als estudiants de diferents carreres que vulguin entendre millor i aprofundir en alguna

de les aplicacions elementals (llocs geomètrics, envolvents, demostració automàtica) que es discuteixen en el llibre.

**Nota de l'editor:** L'original d'aquest article ha estat lliurat en castellà i la traducció al català és de Josep M. Brunat

## Referències

- [1] V. Weispfenning, «Comprehensive Gröbner bases». *Journal of Symbolic Computation* 14 (1992), 1–29.
- [2] Una excel·lent introducció a aquesta temàtica, escrita amb estil divulgatiu, es pot consultar a A. Montes, «La Columna de Matemática Computacional: Discusión de sistemas polinómicos con parámetros». *La Gaceta de la RSME* 14 (2011), núm. 3, 525–544.

## Activitats

### «Les matemàtiques i la vida», al Museu del Suro de Palafrugell

Montserrat Alsina  
Comissària exposició, UPC

«Més enllà de les fórmules, el dia a dia, les matemàtiques i la vida», podria ser el titular d'una nova activitat STEAM, un tema de plena actualitat. I és que de fet, tot i que fa deu anys que està en exposició, «Les matemàtiques i la vida» és una mostra actual de STEAM per a tots els públics.

A partir d'un recorregut en diversos àmbits del dia a dia de la vida quotidiana, es posa de manifest la interrelació de les matemàtiques amb altres àrees de la ciència, la tecnologia i l'enginyeria, i també l'art. La vam desenvolupar el 2009 des del professorat de la Universitat Politècnica de Catalunya a Manresa, a proposta d'en Marcel Sellas, que aleshores estava al càrrec de les exposicions promogudes per la Fundació Caixa Manresa.

Tot i el pas del temps, continua sent cert que cada dia i tothora, des que ens despertem fins que ens n'anem a dormir, les matemàtiques són al nostre voltant. I també continua sent cert que

és important adonar-nos-en i ser-ne conscients, per poder aplicar-les i valorar-les més i millor.

L'exposició havia viatjat a Manresa, Lleida, Barcelona, Castelldefels i Terrassa, i aquest 2019 ha estat al Museu del Suro de Palafrugell, des del febrer fins a finals d'abril, perquè es volia acostar-la a la zona de l'Empordà.

En un espai lluminós i generós, els visitants podien simular que sortien de l'habitació, i, a més de trobar matemàtiques a l'escola, les podien trobar passejant pel carrer, observant el trànsit, aturant-se a contemplar la natura, anant a comprar o de visita al centre de salut.

El lligam entre les matemàtiques i la vida quotidiana és divers i sorprenent, i s'explica amb un llenguatge natural i proper a la gent del carrer. Un dels objectius continua sent trencar l'estigma de matèria difícil i allunyada de la realitat, oferint-les de manera lúdica i variada, i plantejar preguntes per donar peu a nous aprenentatges. És per això que l'expo-